Egzamin poprawkowy z RRZ, 4 września 2021 godz. 10.00-14.00

Każde zadanie oddajemy oddzielnie na moodle. Każde zadanie oceniane jest na 10 pt. Odradzamy wkładanie wszystkich zadań na raz w ostatnim momencie.

Zadanie 1. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(x^2+y^2) - yz,\\ \dot{y} &= -x + y(x^2+y^2) + xz,\\ \dot{z} &= -z + xy.\end{aligned}$$

a) Wykaż, że punkt $(0,0,0)$ jest niestabilny.
b) Wyznacz wszystkie warunki początkowe dla których rozwiązanie zbiega do $(0,0,0)$ przy $t \to +\infty$

Zadanie 2. *Wykaż, że każde rozwiązanie równania*

$$\ddot{x} + \frac{k}{t^2}x = 0, \tag{1}$$

które nie jest tożsamościowo równe zeru, ma nieskończenie wiele miejsc zerowych na $(0,+\infty)$ jeśli $k > 1/4$, a tylko skonczoną liczbę jeśli $k < 1/4$.

Wskazówka: szukaj rozwiązań równania (1) w postaci t^α, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. *Rozwiąż zagadanienie początkowe:*

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + x_3, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 - 3x_1$$

z danymi początkowymi $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0,0,1)$.

Zadanie 4. *Rozważmy równanie*

$$x\dot{x} + x = 0$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Określ dla jakich $x_0 \in \mathbb{R}$ rozwiązanie klasyczne (tzn. klasy C^1) jest jednoznaczne.

Zadanie 5. *Niech funkcja $f(x,y)$ będzie ciągła jako funkcja zmiennej x oraz nierosnąca jako funkcja zmiennej y. Wykazać, że jeśli mamy dwa rozwiązania równania $y'(x) = f(x,y(x))$ z tym samym warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$, to są one równe dla $x > x_0$.*

Wskazówka: wziąć różnicę tych rozwiązań i wykazać, że nie może ona być dodatnia / ujemna w żadnym punkcie.